

УДК 621.7

*В.Л. Доброскок, Я.Н. Гаращенко*

## **ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИХ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ**

<sup>1</sup>Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт (Харьков, Украина),

**Введение.** Современное машиностроение характеризуется постоянным ростом требований к изделиям и соответственно к ресурсосберегающему производству [1]. Однако до настоящего времени отсутствует научно обоснованная методология определения технологичности изделий и выбора стратегии материализации на базе анализа 3D моделей.

Выбор стратегии материализации 3D модели промышленного изделия существенно определяет трудоемкость, материалоемкость, энергоемкость и себестоимость изготовления с использованием как традиционных, так и аддитивных (генеративных) технологий послойного выращивания (Additive manufacturing) [2, 3]. Такой выбор в основном должен учитывать конструктивные особенности изделия [2, 4].

Применительно к аддитивным технологиям исходной геометрической информацией для изготовления является триангуляционная модель промышленного изделия. Триангуляционная модель унифицирует представление о поверхности изделия, что создает предпосылки для анализа системы треугольных граней. Анализ 3D модели должен представлять собой определение безразмерных показателей, позволяющих оценить геометрическую сложность изделия и прогнозировать технологичность его изготовления [5].

Использование безразмерных показателей, характеризующих геометрическую сложность промышленного изделия может позволить решать целый ряд производственных задач, возникающих на основных этапах его жизненного цикла, в частности, на этапах технологической и организационно-экономической подготовки производства. Поэтому научно обоснованная оценка геометрической сложности изделий на базе их компьютерных 3D моделей является актуальной задачей.

В известных работах оценка геометрической сложности изделий, подготавливаемых к материализации аддитивными технологиями,

производилась на основе показателей, определяемых путем топологического и морфометрического анализа триангуляционных моделей [5, 6, 7]. Показатели не учитывали особенности задания параметров триангуляции моделей. Их значения задают ограничения CAD-системы при решении оптимизационной задачи перехода к триангуляционной модели. Параметры триангуляции с учетом конструкции изделия определяют количество и геометрические (статистические) характеристики треугольных граней. Поэтому существующие показатели не являются достаточно представительными для последующего принятия технологических решений на этапе подготовки к изготовлению изделий аддитивными методами.

В данной работе рассмотрена научная гипотеза о том, что анализ влияния параметров триангуляции (в первую очередь — допустимой погрешности) на количество заменяющих треугольных граней может позволить оценивать геометрическую сложность изделий, а следовательно — технологичность их изготовления аддитивными технологиями.

**Цель статьи** — рассмотреть возможность оценки геометрической сложности отдельных изделий на основе анализа зависимости количества треугольных граней от допустимой погрешности триангуляции.

**Изложение основного материала.** В исследовании использовалась CAD-система PowerShape (производитель Autodesk) предлагающая достаточно гибкие настройки параметров триангуляции [8]. В системе PowerShape предусмотрено задание двух параметров, определяющих процесс триангуляции поверхностей модели: допустимая погрешность  $\Delta_{max}$  и максимально допустимый размер ребра  $l_{max}$ . Основным параметром является  $\Delta_{max}$ , определяющий с учетом сложности геометрии поверхности (вида поверхности и ограничивающих ее контуров) количество треугольных граней. Дополнительный параметр  $l_{max}$  задает ограничение на максимальный размер ребер треугольных граней, что в ряде случаев (особенно для плоских поверхностей) увеличивает их количество при триангуляции модели изделия. В других известных CAD-системах основным параметром триангуляции также считается  $\Delta_{max}$ , но при этом, либо ограничиваясь одним параметром, либо предлагая ряд дополнительных (например, в CAD-системе Solidworks — максимально допустимый двугранный угол между смежными гранями) [8]. Поэтому параметр  $\Delta_{max}$  общепринятый в CAD-системах как основной, представляет особый интерес для анализа функциональной зависимости количества треугольных граней  $N_{face}$  от параметров триангуляции на примере простых геометрических тел и нескольких тестовых моделей промышленных

изделий, представленных на рис. 1.

Функционально-регрессионный анализ зависимости  $N_{face} = f(\Delta_{max})$  выполнялся в профессиональном статистическом пакете Statistica (StatSoft, Inc.) и приложении MS Excel. Анализ  $N_{face} = f(\Delta_{max})$  для набора простых геометрических тел (рис. 1) позволит выявить показатели для оценки геометрической сложности модели.

Поскольку абсолютное количество треугольных граней для исследуемых моделей существенно отличаются, то для обеспечения сравнительного анализа результатов и их совместной оценки выполнялась нормировка исследуемых признаков  $N_{face}$  и  $\Delta_{max}$ . При нормировке абсолютные значения исследуемых признаков функционально преобразуются к относительным. Как правило, их приводят к единому исследуемому диапазону значений  $0 \div 1$ . Основными требованиями к нормировке является ее относительная простота и адекватность [9, 10].

Переход от абсолютных значений исследуемых признаков  $N_{face}$ ,  $\Delta_{max}$  к относительным (безразмерным) выполнялся сравнением с эталонным значением [9]. Для этого введено понятие — базовая модель, в качестве которой принимается наиболее точная (с наименьшей допустимой погрешностью  $\Delta_{max}$ ) из исследуемого ряда триангуляционных моделей. В результате исследуемые признаки триангуляционных моделей, полученных на основе триангуляции одной CAD-модели и соответственно имеющие модельное подобие, рассматриваются относительно соответствующих значений признаков базовой модели. В данной работе — это количество граней  $N_{face}$  и погрешность триангуляции  $\Delta_{max}$ . Поэтому регрессионный анализ выполнялся для нормированных значений:

$$x_{\Delta} = \Delta_{max0} / \Delta_{max}, \quad y_N = N_{face} / N_{face0}, \quad (1)$$

где  $\Delta_{max0}$ ,  $N_{face0}$  — исследуемые признаки базовой модели (эталонные значения).

Предложенная нормировка (1) позволяет перейти к диапазону значений  $x_{\Delta} \in (0,1]$  и  $y_N \in (0,1]$  для всего ряда триангуляционных моделей, полученных на основе одной исследуемой CAD-модели независимо от ее геометрических свойств.

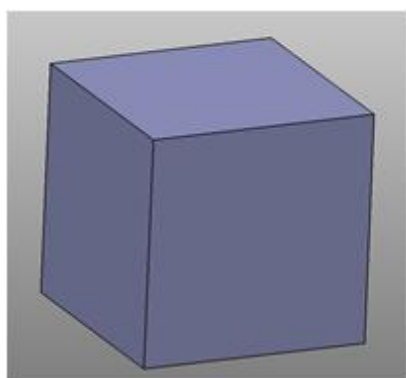
При анализе зависимости  $y_N = f(x_{\Delta})$  триангуляционные модели создавались по CAD-модели с допустимой погрешностью триангуляции  $\Delta_{max} = 10^{-3} \div 10^{-1}$  мм. Диапазон значений  $\Delta_{max}$  определился требованиями необходимой точности триангуляционной модели для изготовления изделия существующими

аддитивными технологиями и достаточно большого интервала, позволяющего выявить особенности функциональной зависимости  $y_N = f(x_\Delta)$  для тестовых моделей.

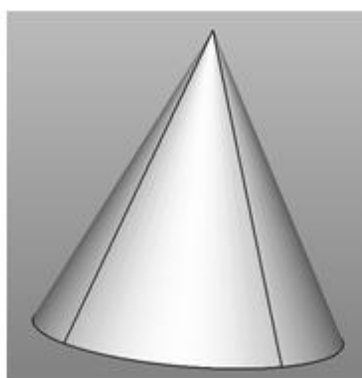
Изучение зависимости  $y_N = f(x_\Delta)$  для тестовых моделей (см. рис. 1) выполнялось при объеме выборки  $n = 5$  (количество триангуляционных моделей, создаваемых на базе тестовой CAD-модели). Критическое значение коэффициента корреляции составляло  $R_{cr} = 0.991$  для числа степеней свободы  $d_f = (r - 2) = 3$  при уровне значимости  $\alpha = 0.001$  [11, 12].

По результатам регрессионного анализа зависимости  $y_N = f(x_\Delta)$  с использованием набора уравнений из [11, 12, 13] и их комбинаций, следующее уравнение регрессии обеспечивает наименьшие значения максимального относительного отклонения от модельных данных:

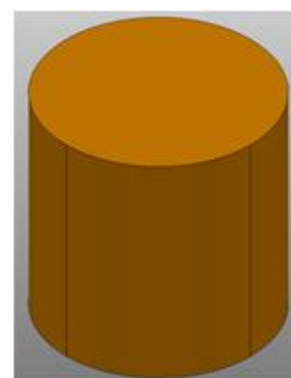
$$y_N = ax_\Delta + b\sqrt{x_\Delta} + c, \quad (2)$$



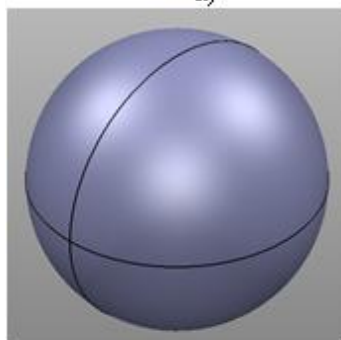
а)



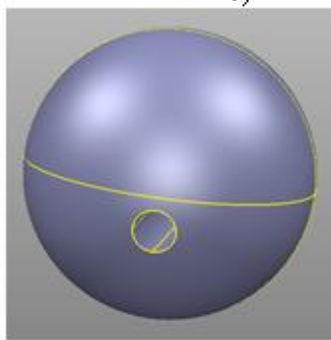
б)



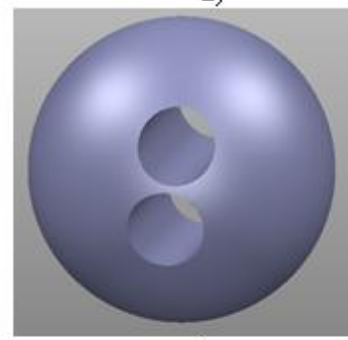
в)



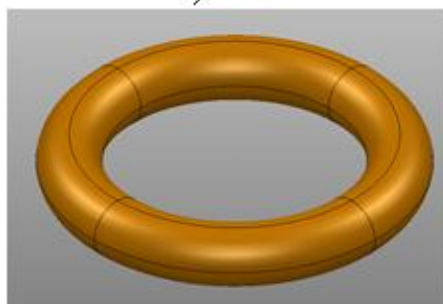
г)



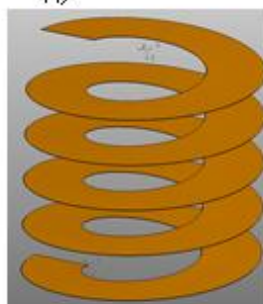
д)



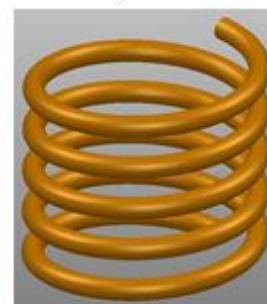
е)



ж)



з)



и)

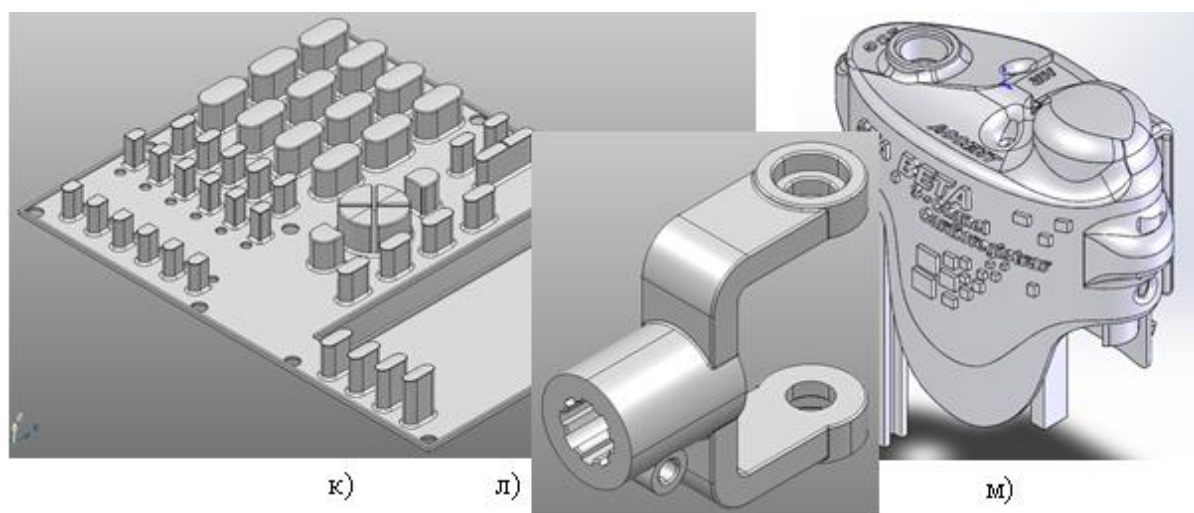


Рис. 1 – 3D Модели для анализа функциональных зависимостей исследуемых признаков:

куб с плоскими поверхностями (а), конус с поверхностями торцевой плоской и прямого кругового конуса (б), цилиндр с поверхностями торцевыми плоскими и цилиндрической поверхностью вращения (в), сферы (поверхности сферическая (г), сферическая и одной цилиндрической с общими криволинейными контурами (д), сферическая и двумя цилиндрическими с общими криволинейными контурами (е)), открытый тор (ж), прямой геликоид (з), винтовая поверхность цилиндрической пружины (и), тестовые модели промышленных изделий (№ 1 - панель (к), № 2 - карданный вал (л), №3 - крышка (м))

Результаты регрессионного анализа с уравнением (2), представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты регрессионного анализа зависимости относительного количества граней модели от относительной допустимой погрешности триангуляции

Модель (размеры, мм)	Количество граней базовой модели ( $\Delta_{max0} = 1$ мкм)	Коэффициенты уравнения (2)		
		$a$	$b$	$c$
Куб (100 × 100)	12	-	-	1.00
Конус (R = 50, H = 100)	994	-0.008	1.008	0
Цилиндр (R = 50, H = 100)	1 988	-0.008	1.008	0
Сфера (R = 50)	517 548	1.001	-0.002	0.001
Сфера (R = 100)	1 030 840	0.993	0.007	0
Сфера с отв. (R = 100, r = 15)	507 080	0.982	0.018	0
Сфера с отв. (R = 100, r = 25)	1 021 106	0.985	0.015	0
Сфера с 2-мя отв. (R = 100, r = 25)	1 007 294	0.975	0.025	0
Тор (R = 50, r = 5)	261 172	0.977	0.023	0
Тор (R = 50, r = 10)	378 804	0.975	0.026	0.001
Геликоид (R = 50, H = 100)	53 600	0.880	0.119	0
Пружина (R = 50, r = 5, H = 100)	1 319 840	0.978	0.022	0



Окончание табл. 1

Модель (размеры, мм)	Количество граней базовой модели ( $\Delta_{max0} = 1$ мкм)	Коэффициенты уравнения (2)		
		$a$	$b$	$c$
Тестовая модель изделия №1 ( $151.5 \times 195.5 \times 20.1$ )	499 952	0.676	0.317	0.007
Тестовая модель изделия №2 ( $147.5 \times 50.0 \times 124.0$ )	175 154	0.813	0.186	0.001
Тестовая модель изделия №3 ( $83.9 \times 101.3 \times 43.2$ )	387 264	0.728	0.269	0.003

Зависимости относительного количества граней модели от относительной допустимой погрешности триангуляции для исследуемых моделей представлены на рис 2. Функциональные зависимости для куба и цилиндра существенно отличаются от прочих моделей. Относительное отличие остальных моделей незначительно и в ряде случаев находится в пределах погрешности определения значений их коэффициентов.

Коэффициенты уравнений регрессии для моделей сфер с отличающимися радиусами имеют достаточно близкие значения (относительное отклонение  $< 1 \%$ ), что дополнительно подтверждает рациональность выбора уравнения регрессии и нормировки исследуемых признаков.

Анализ количества треугольных граней для отдельных поверхностей модели сферы с отверстием (результаты представлены в табл. 2) показал, что коэффициенты уравнений приблизительно соответствуют среднеарифметическому относительных количеств граней сферической  $N_{mean\_sph}$  и цилиндрической поверхности  $N_{mean\_cil}$ . Коэффициент  $a$  — для поверхности сферы ( $N_{mean\_sph} = 0.976$ , при значении коэффициента  $a = 0.979$ ) и  $b$  — для цилиндрической поверхности отверстия ( $N_{mean\_cil} = 0.024$  при  $b = 0.021$ ).

Таблица 2

Результаты анализа относительного количества граней для отдельных поверхностей триангуляционных моделей сферы с отверстием

Относительная погрешность триангуляции модели $\Delta_{max0} / \Delta_{max}$	Относительное количество треугольных граней для поверхности	
	сферической	цилиндрической (отверстия)
1.00	0.995	0.005
0.20	0.987	0.013
0.10	0.982	0.018
0.02	0.960	0.040
0.01	0.954	0.046

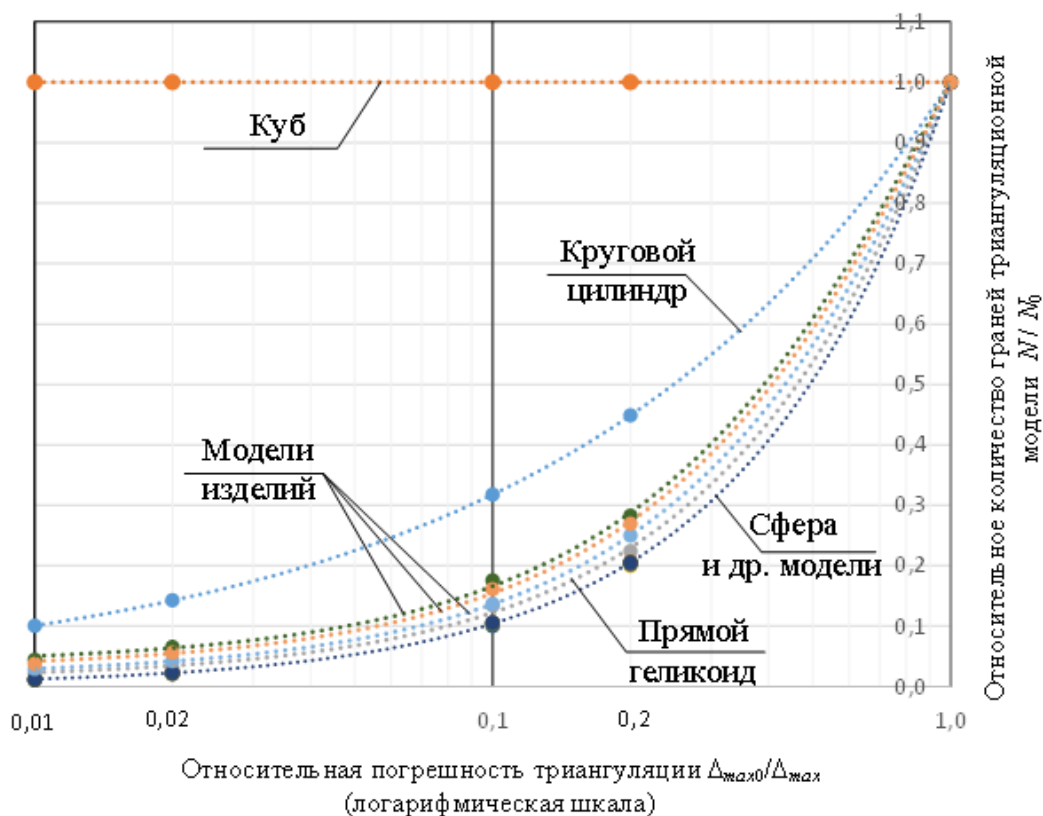


Рисунок 2

Влияние относительной погрешности триангуляции на относительное количество граней триангуляционной модели (погрешность базовой модели  $\Delta_{max0} = 0.001$  мм, количество граней базовой модели  $N_0$  приведено в табл. 1)

Анализ тестовых моделей (результаты анализа на примере модели сферы с отверстием представлены в табл. 2) позволяют утверждать, что значения коэффициентов уравнения регрессии (5) можно ассоциировать с относительным количеством треугольных граней, принадлежащим отдельным видам поверхностей:  $a$  – сферической;  $b$  – цилиндрической и плоской с криволинейным контуром;  $c$  – плоской с прямолинейным контуром (количество граней не изменяется от допустимой погрешности триангуляции  $\Delta_{max}$ ). Таким образом, на основе сравнения значений коэффициентов возможна оценка геометрической сложности изделий.

Некоторые коэффициенты уравнений регрессии в табл. 1 несущественно выходят за допустимые пределы  $0 \div 1$ . Это связано с особенностью их определения в пакете Statistica. Примененная нормировка исследуемых признаков (1) предполагает выполнение для коэффициентов уравнения (2) следующего условия:

$$a + b + c = 1. \quad (3)$$

Поэтому для обеспечения корректной оценки геометрической сложности изделий значения коэффициентов уравнения (2), выходящие за допустимые

пределы диапазона,  $a \in [0,1], b \in [0,1], c \in [0,1]$  следует с учетом условия (3) округлять до ближайшего предельного значения.

Для подтверждения результатов регрессионного анализа и вывода о связи коэффициентов уравнения (2) с количеством треугольных граней, принадлежащих определенным видам поверхностей, рассмотрены особенности триангуляции плоской, цилиндрической и сферической поверхности.

*Плоские поверхности.* Примеры триангуляции плоских поверхностей представлены на рис. 3. С позиций триангуляции необходимо плоские поверхности разделить на группы по форме ограничивающих контуров — прямолинейного (рис. 3а, б), криволинейного (рис. 3в, г) и комбинированного (рис. 3д, е).

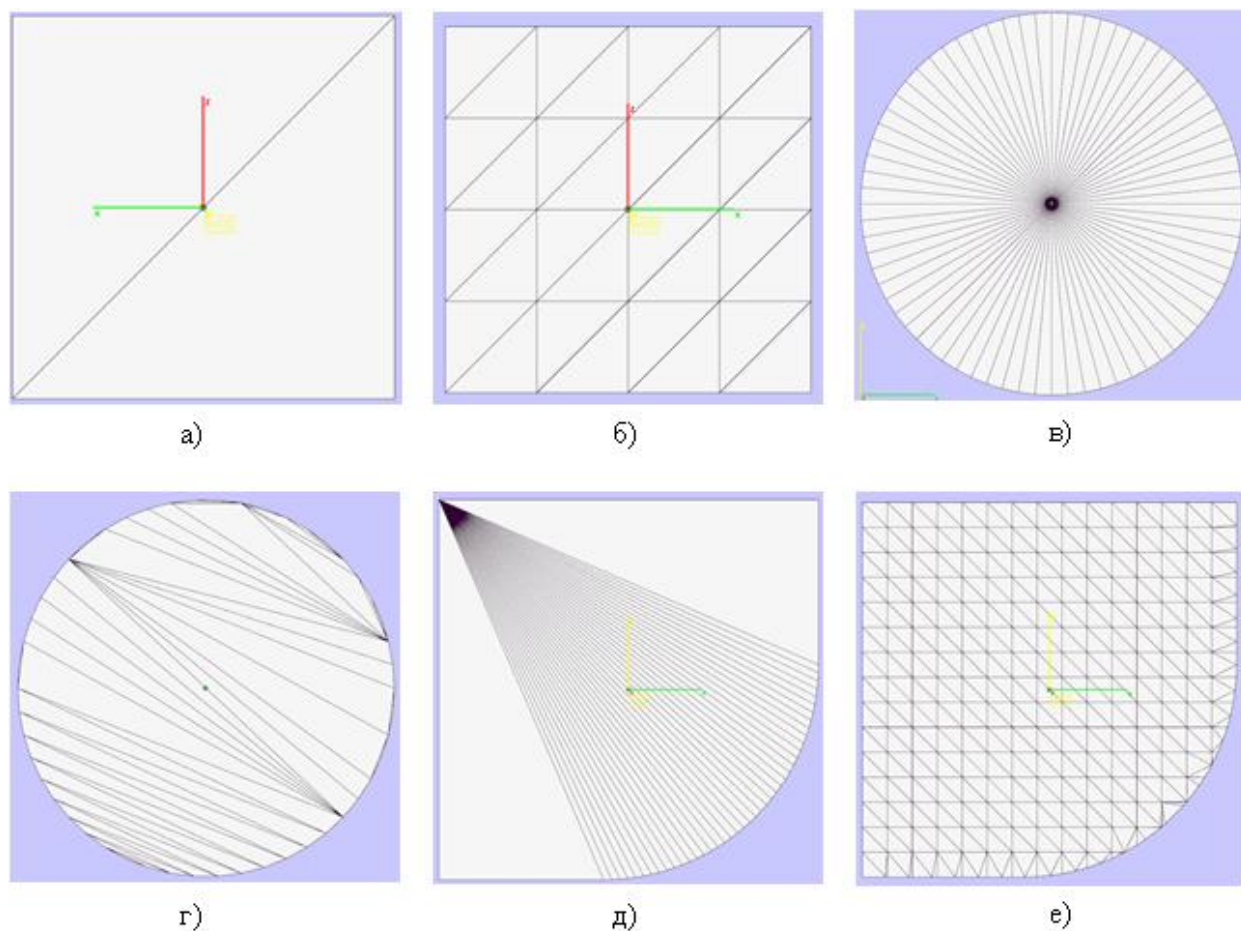
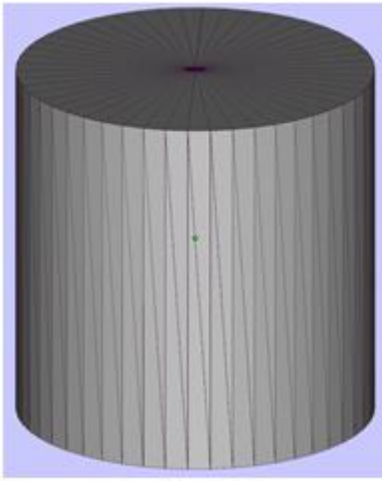


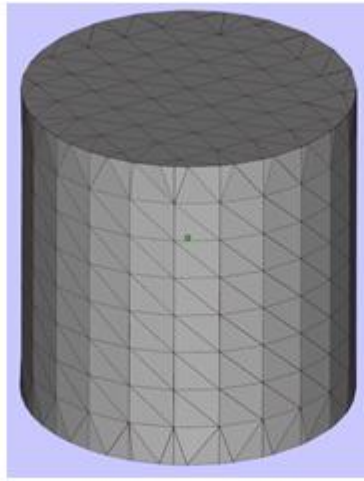
Рис. 3

Триангуляция плоских поверхностей с прямолинейными контурами (а, б), с криволинейным контуром по окружности (в, г) и комбинированные (д, е)





а)



б)

Рис. 4

Триангуляция прямых круговых цилиндров с заданием допустимой погрешности триангуляции  $\Delta_{max}$ (а) и максимального допустимого размера ребра  $l_{max}$ (б)

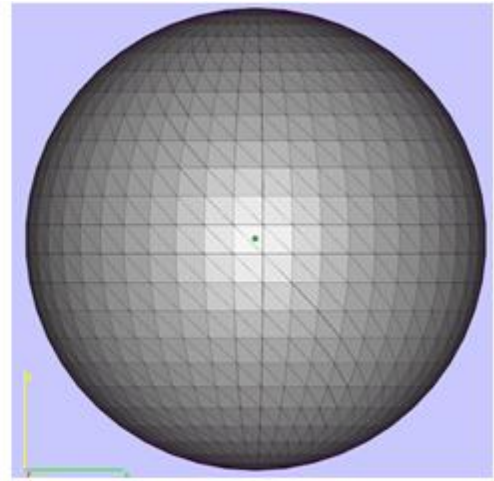


Рис. 5

Триангуляция сферы

Плоские поверхности с прямолинейными контурами. Для таких поверхностей количество граней определяется особенностями триангуляции в CAD-системе и не зависит от  $\Delta_{max}$  (рис. 3а, б):

$$N_{face\_fl} = const . \quad (4)$$

Примеры, представленные на рис. 3а, б отличаются включением дополнительного параметра триангуляции – максимально допустимый размер ребер  $l_{max}$ .

Для плоских поверхностей с криволинейным контуром количество граней  $N_{face}$  будет изменяться в зависимости от периметра и радиуса кривизны контура. Например, для поверхности ограниченной окружностью треугольные грани будут образовывать вписанный многоугольник. При условии достаточно большого соотношения радиуса окружности  $R_{circle}$  к величине погрешности  $\Delta_{max}$  можно определить количество граней  $N_{face}$  из соотношения длины окружности контура к размеру внешних ребер  $l_{out}$  определяемых  $R_{circle}$  и  $\Delta_{max}$  [14]:

$$N_{face\_fc}(\Delta_{max}) = \frac{2\pi R_{circle}}{l_{out}} = \frac{2\pi R_{circle}}{2\sqrt{R_{circle}^2 - (R_{circle} - \Delta_{max})^2}} = \frac{\pi R_{circle}}{\sqrt{2R_{circle} \cdot \Delta_{max} - \Delta_{max}^2}} ,$$

$\Delta_{max}^2$  можно отбросить т. к.  $\Delta_{max}^2 \ll R_{circle} \cdot \Delta_{max}$  в результате получим:

$$N_{face\_fc}(\Delta_{max}) \approx \frac{\pi R_{circle}}{\sqrt{2R_{circle} \cdot \Delta_{max}}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_{circle}}{\Delta_{max}}} . \quad (5)$$

Полученная зависимость (5) применима для двух вариантов триангуляции, представленных на рис. 3в, г.

Плоские поверхности с комбинированным контуром (рис. 3д, е) совмещают особенности определения количества граней для двух групп с прямолинейным и криволинейным контуром:

$$N_{face\_lc}(\Delta_{max}) = N_{face\_l} + N_{face\_c}. \quad (6)$$

где  $N_{face\_l}$  – количество граней, описывающих прямолинейные участки контура;

$N_{face\_c}$  – количество граней, описывающих криволинейные участки контура.

На прямолинейных участках контура количество граней  $N_{face\_l}$  не зависит от величины  $\Delta_{max}$ , но определяется количеством таких участков (при условии отсутствия ограничений на размер ребер). На криволинейных зависит от их периметра  $P_{curve}$  и радиуса кривизны  $R_{curve}$  по аналогии с (5) (для примера представленного на рис. 3д и условия  $R_{curve} = const$ ):

$$N_{face\_c}(\Delta_{max}) = \frac{P_{curve}}{l_{out}} = \frac{\phi R_{curve}}{2\sqrt{R_{curve}^2 - (R_{circle} - \Delta_{max})^2}} = \frac{\phi R_{curve}}{2\sqrt{2R_{curve} \cdot \Delta_{max} - \Delta_{max}^2}} \approx \frac{\phi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_{curve}}{\Delta_{max}}}, \quad (7)$$

где  $\phi$  – угол дуги криволинейного контура, рад.

*Цилиндрические поверхности.* Рассмотрена наиболее распространенная в машиностроении боковая поверхность прямого кругового цилиндра. На рис. 4 представлены примеры его триангуляции. Приблизительное количество треугольных граней при описании боковой поверхности круговых цилиндров (для варианта триангуляции – рис. 4а) будет определяться аналогично (5) по следующей зависимости:

$$N_{face\_cyl}(\Delta_{max}) \approx \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{R_{cylinder}}{\Delta_{max}}}, \quad (8)$$

где  $R_{cylinder}$  – радиус цилиндрической поверхности.

*Сферические поверхности* (пример триангуляции представлен на рис. 3). Особенность триангуляции сфер в CAD-системах — это описание ребрами граней линий "параллелей" и "меридианов" с двумя полюсами. Поэтому приблизительное количество треугольников для описания сферической поверхности вполне можно определить как произведение количества треугольников, получаемых по меридиане и наибольшей параллели. Количество треугольников по меридиане  $N_{mer}$  и параллели  $N_{par}$  будет одинаковым и может определяться как соотношение их периметра к длине ребра грани  $l_{par}$  (к длине катета прямоугольного треугольника, т. к. анализ моделей показал приблизительное соответствие граней прямоугольному треугольнику с равными катетами). Наибольшее ребро грани (гипотенуза прямоугольного треугольника)  $l_{par\_hyp}$  определяется как диаметр шарового сегмента с высотой  $\Delta_{max}$ . Зависимость для определения количества граней

сферы:

$$N_{face\_sph}(\Delta_{max}) = N_{mer} N_{par} = N_{par}^2 = \left( \frac{2\pi R_{sphere}}{l_{par}} \right)^2 = \left( \frac{2\pi R_{sphere}}{l_{par\_hyp} / \sqrt{2}} \right)^2 =$$

$$= 8 \left( \frac{\pi R_{sphere}}{2\sqrt{R_{sphere}^2 - (R_{sphere} - \Delta_{max})^2}} \right)^2 = \frac{\pi^2 R_{sphere}^2}{R_{sphere} \cdot \Delta_{max} - \Delta_{max}^2},$$

$\Delta_{max}^2$  можно отбросить т. к.  $\Delta_{max}^2 \ll R_{sphere} \cdot \Delta_{max}$  в результате получим:

$$N_{face\_sph}(\Delta_{max}) \approx \frac{\pi^2 R_{sphere}^2}{R_{sphere} \cdot \Delta_{max}} \approx \pi^2 \frac{R_{sphere}}{\Delta_{max}}, \quad (9)$$

где  $R_{sphere}$  – радиус сферы.

Полученные зависимости (4) – (9) для триангуляции частных случаев поверхностей не противоречат модельным данным по выявленным закономерностям влияния погрешности триангуляции на количество треугольных граней и в достаточной мере подтверждают адекватность выбранного уравнения регрессии (2).

Для выработки комплексного показателя геометрической сложности изделий необходимо дальнейшее изучение влияния основного и дополнительных параметров триангуляции на количество и геометрические характеристики граней триангуляционных моделей для различных видов поверхностей [15], применяемых в машиностроении.

### Выводы:

1. Анализ влияния основного параметра триангуляции (допустимой погрешности) на количество граней триангуляционной модели позволяет оценивать геометрическую сложность изделий, а в перспективе — технологичность их изготовления аддитивными технологиями.

2. Переход от абсолютных значений исследуемых признаков к относительным путем сравнения с эталонными значениями обеспечивает возможность совместной оценки результатов исследования независимо от геометрической сложности модели. В качестве эталонных приняты значения соответствующих исследуемых признаков триангуляционной модели с наименьшей допустимой погрешностью  $\Delta_{max}$  из исследуемого ряда моделей.

3. Представляется перспективным создание базы данных результатов оценки геометрической сложности, технологических параметров и эффективности изготовления изделий. База данных создаст информационные предпосылки для повышения уровня технологической подготовки к изготовлению сложных изделий аддитивными технологиями.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интегрированные технологии ускоренного прототипирования и изготовления / Л.Л. Товажнянский, А.И. Грабченко, С.И. Чернышов и др. Под ред. Л.Л. Товажнянского и А.И. Грабченко. – Харьков: ОАО «Модель Вселенной», 2005. – 224 с.
2. Технологичность конструкции изделия: Справочник / Ю.Д. Амиров, Т.К. Алферова, П.Н. Волков и др.; Под общ. ред. Ю.Д. Амирова. - М.: Машиностроение, 1990. - 768 с.
3. Технологичность конструкций изделий: Справочник / Т.К. Алферова, Ю.Д. Амиров, П.Н. Волков и др.; Под ред. Ю.Д. Амирова. - М.: Машиностроение, 1985. - 368 с.
4. Витязев Ю.Б. Расширение технологических возможностей ускоренного формообразования способом стереолитографии: Дис. канд. техн. наук: 05.02.08 - Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", Харьков, 2004. - 228 с.
5. Доброскок В.Л., Фадеев В.А. Гаращенко Я.Н., Чернышов С.И. Морфологический анализ триангуляционных моделей промышленных изделий // Резание и инструмент в технологических системах. - Харьков: НТУ «ХПИ». - 2011. - Вып. 79. - С. 52-63.
6. Абдурайимов Л.Н. Повышение эффективности интегрированных технологий послойного выращивания изделий путем морфологического анализа их 3D образа на этапе подготовки к материализации: Дис. канд. техн. наук: 05.02.08. - Харьков: Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", 2012. - 264 с.
7. Доброскок В.Л., Абдурайимов Л.Н., Чернышов С.И. Интегральные характеристики триангуляционных 3D моделей изделий // Резание и инструмент в технологических системах. - Харьков: НТУ «ХПИ». - 2011. - Вып. 80. - С. 92-101.
8. Доброскок В.Л., Гаращенко Я.Н., Чернышов С.И., Зубкова Н.В. Возможности современных CAD систем при переходе к триангулированным моделям // Високі технології в машинобудуванні: Зб. наук. пр. - Харків: НТУ "ХПИ". - 2010. - Вип. 1(20). - С. 79-86.
9. Методика построения интегральных индикаторов с помощью нормирующих функций [электронный ресурс] / [http://sphaera.cemi.rssi.ru/In\\_Ind/Metio\\_ru.htm](http://sphaera.cemi.rssi.ru/In_Ind/Metio_ru.htm).
10. Буреева Н.Н. Многомерный статистический анализ с использованием ППП "STATISTICA". Учебно-методический материал по программе повышения квалификации "Применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики". Нижний Новгород, 2007. - 112 с.
11. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования Эксперимента в технико-экономических исследованиях. - М.: Финансы и

статистика, 1981. - 263 с.

12. Колкер Я.Д. Математический анализ точности механической обработки деталей. - К.: Техника, 1976. - 200 с.

13. Л.М. Батунер, М.Е. Позин Математические методы в химической технике. - Л.: Изд-во "Химия", 1971. - 824 с.

14. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. — М: АСТ: Астрель, 2006. — 509 с.

15. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. - М.: Наука, 2006. - 544 с.

УДК 534.11

*В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов, И.В. Корпен*

## **СВОБОДНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ, ИЗМЕНЕНИЕ ДЛИНЫ КОТОРОГО ПРОИСХОДИТ НА СВОБОДНОМ КОНЦЕ**

Филиал ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический  
университет» в г.Сызрани

Если затухание поперечных колебаний обусловлено, главным образом, действием внешних демпфирующих сил, то в случае продольных колебаний основное влияние на затухание оказывают упругие несовершенства материала колеблющегося объекта.

Рассмотрим продольные колебания вязкоупругого стержня, изменение длины которого происходит на свободном конце (например, стержень выдвигается со скоростью  $v_0$ ). Дифференциальное уравнение (вязкоупругость учитывается на основе гипотезы Фойгта), имеет вид [1]

$$Z_{tt}(x,t) - a^2[Z_{xx}(x,t) + \mu Z_{xxt}(x,t)] = 0. \quad (1)$$

Граничные условия системы

$$Z(0,t) = 0; \quad (2)$$

$$Z_x(l_0(v_0t),t) = 0. \quad (3)$$

В задаче (1) - (3) обозначено:  $Z(x,t)$  – продольное смещение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения